Лекция 9. Производная сложной функции. Производная функции, заданной неявно. Производная функции, заданной параметрически. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница. Инвариантность формы первого дифференциала. Теоремы о средних значениях

Производная сложной функции.

Теорема 9.1. (производная сложной функции). Пусть задана $z = F(x) = f(\varphi(x))$, где $y = \varphi(x)$, $z = f(y)$, при этом $\varphi(x)$ имеет производную в точке x, а $f(y)$ в точке $y = \varphi(x)$, тогда существует

$$z' = F'(x) = f'(y)\varphi'(x) \qquad (1),$$

или $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$

Доказательство. Так как φ имеет производную в точке x, а $f(y)$ в точке y, то по Т.8.3

$$\Delta y = \varphi'(x)\Delta x + \alpha_1(\Delta x)\Delta x, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha_1(\Delta x) = 0 \qquad (2)$$

$$\Delta z = f'(y)\Delta y + \alpha_2(\Delta y)\Delta y, \quad \lim_{\Delta y \to 0} \alpha_2(\Delta y) = 0 \qquad (3).$$

Подставляя (2) в (3), получаем

$\Delta z = f'(y)\varphi'(x)\Delta x + f'(y)\,\alpha_1(\Delta x)\Delta x + \alpha_2(\Delta y)\Delta y$. В силу теоремы 8.4. $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Делим Δz на Δx и переходим к пределу $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta x} = f'(y)\varphi'(x) = F'(x)$.

Пример. Найти производную функции $z = f\left(\varphi(x)\right) = \ln \sin x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$. Функция $z = \ln \sin x$ является композицией двух функций: $y = \varphi(x) = \sin x$ и $z = f(y) = \ln y$. Функция $y = \varphi(x) = \sin x$ имеет в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ производную, причем $\varphi'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$. Функция $z = f(y) = \ln y$ в точке $y_0 = \sin x_0 = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ также имеет производную, причем $f'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Тогда по формуле (1) имеем $z'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = f'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \varphi'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Пример. Вычислить производную $z = \sqrt{1 + x^2}$. Исследуемая функция является композицией двух функций $y = 1 + x^2$ и $z = \sqrt{y}$, причем $\dfrac{dy}{dx} = 2x$, $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$. По формуле (1) имеем $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{y}} = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Определение 9.1. Производная от натурального логарифма модуля функции называется логарифмической производной, т.е.

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}\left(\ln|f(x)|\right) \equiv \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad f(x) \neq 0 \qquad (4).$$

Пример. Найти логарифмическую производную функции $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$, $x \neq 1$, $x \neq 2$, $x \neq 3$, $x \neq 4$.

Воспользуемся формулой (4):

$$\frac{y'}{y} = \left(\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + 3\ln|x-3| + 4\ln|x-4|\right)' =$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} + \frac{4}{x-4}.$$

Очевидно, что, умножив полученное равенство на $f(x)$, получим обычную производную функции $f(x)$.

Пример. Найти производную функции $y = \left(f(x)\right)^{g(x)}$, если $f(x) > 0$ и функции $f(x)$, $g(x)$ — дифференцируемы при $x \in R$. Преобразуем функцию к виду $y = e^{g(x)\ln f(x)}$. Дифференцируя, получим

$$\frac{dy}{dx} = e^{g(x)\ln f(x)}\left(g(x)\ln f(x)\right)' = \left(f(x)\right)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)}g(x)\right).$$

Например, производная функции $y = \left(2+\cos x\right)^x$ определяется по полученной формуле:

$$\frac{dy}{dx} = e^{x\ln(2+\cos x)}\left(\ln(2+\cos x) - x\frac{\sin x}{2+\cos x}\right).$$

Дифференциал сложной функции.

Следствием теоремы 9.1 является формула дифференциала сложной функции. Так как $z' = F'(x) = f'(y)\varphi'(x)$, где $y = \varphi(x)$, $z = f(y)$, $z = F(x) = f(\varphi(x))$, то $dz = F'(x)\,dx = f'(y)\varphi'(x)\,dx = f'(y)\,dy$, $(dy = \varphi'(x)\,dx)$.

Это равенство означает инвариантность формы первого дифференциала.

Производная функции, заданной неявно.

Существует довольно простой способ подсчета производной неявной функции. Пусть дифференцируемая функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$. Дифференцируем по x тождество $F\left(x, f(x)\right) \equiv 0$ как сложную функцию. После этого из полученного равенства выражаем производную y'_x.

Пример. $x^2 + y^2 - 1 = 0$. $2x + 2yy'_x = 0 \Rightarrow y'_x = -\frac{x}{y}$.

Производная функции, заданной параметрически.

Теорема 9.2. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ определены в некоторой $U(t)$, и пусть одна из функций, например, $x(t)$ непрерывна и строго монотонна. Пусть существуют в точке t первые производные y'_t, $x'_t \neq 0$. Тогда определена обратная функция $t = t(x)$ и сложная функция $y = y(t(x))$ дифференцируема по x, причем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Доказательство. $y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \dfrac{1}{x'_t} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Пример. Пусть $y = f(x)$ задана параметрически формулами $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in (0, \pi/2)$. Заданные функции дифференцируемы и $x(t)$ — монотонна. Таким образом, имеем $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -tg\, t$.

Аналогичным образом получается формула для второй производной:

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_{tt} - x''_{tt} \cdot y'_t t}{(x'_t)^3}.$$

Производные высших порядков.

Определение 9.2. Производной порядка n функции $f(x)$ в точке x называется

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$$

Определение 9.3. Функция $f(x)$ называется n - раз непрерывно дифференцируемой в точке x, если в этой точке существует производная порядка n, и эта производная непрерывна.

Довольно просто доказать следующие свойства.

Свойство 1. $\left(f_1 + f_2\right)^{(n)} = f_1^{(n)} + f_2^{(n)}$.

Свойство 2. $\left(f_1 \cdot f_2\right)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f_1^{(n-k)} \cdot f_2^{(k)}$ — формула Лейбница, которая напоминает формулу бинома Ньютона, только вместо показателя степени стоит порядок производной.

Пример. Найти производную порядка n функции $f(x) = \cos\alpha x$. Найдем первую производную: $f'(x) = \alpha\cos\left(\alpha x + \frac{\pi}{2}\right)$. Предположим, что для произвольного k верно $\left(\cos\alpha x\right)^{(k)} = \alpha^k \cos\left(\alpha x + \frac{\pi k}{2}\right)$. Легко проверить непосредственным дифференцированием, что эта формула верна и для $k+1$, т.е. $\left(\cos\alpha x\right)^{(k+1)} = \alpha^{k+1}\cos\left(\alpha x + \frac{\pi(k+1)}{2}\right)$.

Таким образом по индукции доказана формула

$$\left(\cos\alpha x\right)^{(n)} = \alpha^n \cos\left(\alpha x + \frac{\pi n}{2}\right) \qquad (5).$$

Аналогично можно показать, что

$$\left(\sin\alpha x\right)^{(n)} = \alpha^n \sin\left(\alpha x + \frac{\pi n}{2}\right) \qquad (6).$$

$$\left(a^x\right)^{(n)} = a^x \ln^n a \qquad (7).$$

$$\left(\ln|x|\right)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \qquad (8).$$

Пример. Найти производную порядка n функции $f(x) = x^2\cos 2x$. Применим формулу Лейбница, положив в ней $f_1 = x^2$, $f_2 = \cos 2x$:

$$\left(x^2\cos 2x\right)^{(n)} = C_n^0 x^2 \left(\cos 2x\right)^{(n)} + C_n^1 2x\left(\cos 2x\right)^{(n-1)} + 2C_n^2\left(\cos 2x\right)^{(n-2)}.$$

Остальные слагаемые равны нулю, т.к. $f_1^{(3)} \equiv 0$

Теперь воспользуемся формулой (5) и получим

$$\left(x^2\cos 2x\right)^{(n)} = 2^n\left(x^2 - \frac{n(n-1)}{4}\right)\cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right) + 2^n n x \sin\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

Дифференциал высших порядков.

При рассмотрении дифференциала первого порядка для дифференцируемой на (a, b) функции была получена формула $dy = f'(x)dx$. Если дифференциал dx, совпадающий с приращением независимого переменного x не меняется, то dy является функцией только от x. Дифференциал от этой функции, т.е. дифференциал от $f'(x)dx$, где dx — постоянная величина, называют вторым дифференциалом или дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ и обозначают $d^2 f$ или $d^2 y$. При этом считается, что привычислении второго дифференциала приращение dx независимого переменного выбрано таким же, как и при вычислении первого дифференциала.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в точке x. Тогда получаем $d^2 y = d(dy) = d\left(f'(x)dx\right) = dx f''(x)dx = f''(x)dx^2$,

где $dx^2 = (dx)^2$.

Аналогично, предполагая, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x производную n-го порядка имеем $d^n y = d\left(d^{n-1}y\right)$.

Предполагая, что приращение независимого переменного при вычислении первого и всех последующих дифференциалов выбирается одним и тем же, легко показать, что

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n \qquad (7).$$

Из (7) следует, что $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Необходимо отметить, что дифференциал второго порядка не обладает свойством инвариантности формы, т.е. (7) не сохраняется при замене x на $\varphi(t)$.

Действительно, пусть $y = f(x) = f\left(\varphi(t)\right)$. Если существуют вторые производные функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, то получаем

$$d^2 y = \left(f'(\varphi(t))\varphi'(t)\right)' dt^2 = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2 x \qquad (8)$$

где $d^2 x = \varphi''(t)dt^2$

или $d^2 y = y''dx^2 + y'd^2 x$.

Теоремы о средних значениях.

Теорема 9.3 (Ферма). Пусть $f(x)$ определена на интервале (a, b) и в точке $\xi \in (a, b)$ принимает наибольшее или наименьшее значение. Если $f'(\xi)$ существует, то она равна нулю: $f'(\xi) = 0$.

Доказательство. Пусть, для определенности, в точке $\xi \in (a, b)$ принимается наибольшее значение, т.е. $f(x) \le f(\xi)$ для любого $x \in (a, b)$, при $x < \xi$ выполняется $\dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \ge 0$, а при $x > \xi$ выполняется $\dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \le 0$. Если производная существует, то при $x - \xi \to 0$ в первом случае она неотрицательна, а во втором неположительна, что возможно, только, если $f'(\xi) = 0$.

Теорема 9.4. (Ролль). Пусть $f(x)$

. непрерывна на отрезке $[a, b]$;

. имеет в каждой точке интервала (a, b) производную;

. $f(a)=f(b)$, тогда $\exists \xi \in (a, b): f'(\xi)=0$.

Доказательство. Пусть $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, и по т. 7.4 оба этих значения достигаются, тогда для любого $x\in[a,b]$ $m\le f(x)\le M$. Если $M=m$, то $f(x)=const$ и $f'(x)=0$. Пусть $M\ne m$, тогда из условия $f(a)=f(b)$ одно из значений M или m не принимается на концах. Пусть это будет M, т.е. $\exists \xi\in(a,b): f(\xi)=M$. Но по т.9.3 $f'(\xi)=0$.

Теорема 9.5 (Лагранж). Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ имеет производную на интервале (a, b), тогда $\exists \xi\in(a,b): f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

Доказательство. Введем новую функцию $F(x)=f(x)-\lambda x$, а λ выберем из условия $F(a)=F(b)$, т.е. $\lambda=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Для функции $F(x)$ выполнены условия Т.9.4, поэтому $\exists \xi\in(a,b): F'(\xi)=0$, т.е. $F'(\xi)=f'(\xi)-\lambda=0 \Rightarrow f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Теорема 9.6 (Коши). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$

. непрерывны на $[a, b]$;

. имеют производные на (a, b);

. $\varphi'(x)\ne 0$, для любого $x\in(a,b)$,

тогда $\exists \xi\in(a,b): \dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$.

Доказательство. Введем новую функцию $F(x)=f(x)-\lambda\varphi(x)$, а λ выберем из условия $F(a)=F(b)$, т.е. $\lambda=\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$. Для функции $F(x)$ выполнены условия Т.9.4, т.е. $\exists \xi\in(a,b): F'(\xi)=0$, т.е. $F'(\xi)=f'(\xi)-\lambda\varphi'(\xi)=0 \Rightarrow$ $\dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}=\lambda=\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$. При этом $\varphi(b)\ne\varphi(a)$, так как иначе по теореме Ролля $\exists \xi\in(a,b): \varphi'(\xi)=0$, что противоречит условию 3. теоремы.

Очевидно, что Т.9.5 является частным случаем Т.9.6, но так как Т.9.5 имеет важное практическое применение и, сохранив историческую последовательность, здесь приведены обе теоремы.