Лекция 8. Производная функции. Свойства производной. Геометрический смысл. Связь дифференцируемости и непрерывности. Производная обратной функции.

Определение 8.1. Пусть функция $y=f(x)$ определена в $U(x_0)$. Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда последнее стремится к нулю. Обозначается производная $f'(x_0)$:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Употребляются и другие обозначения $f'(x)=y'=\dfrac{df}{dx}=\dfrac{dy}{dx}$.

Операция вычисления производной называется операцией дифференцирования.

Производные слева (справа) определяются если вместо $\Delta x\to 0$ написать $\Delta x\to -0$ ($\Delta x\to +0$).

В дальнейшем (там, где это возможно) вместо точки x_0 будем указывать просто точку x.

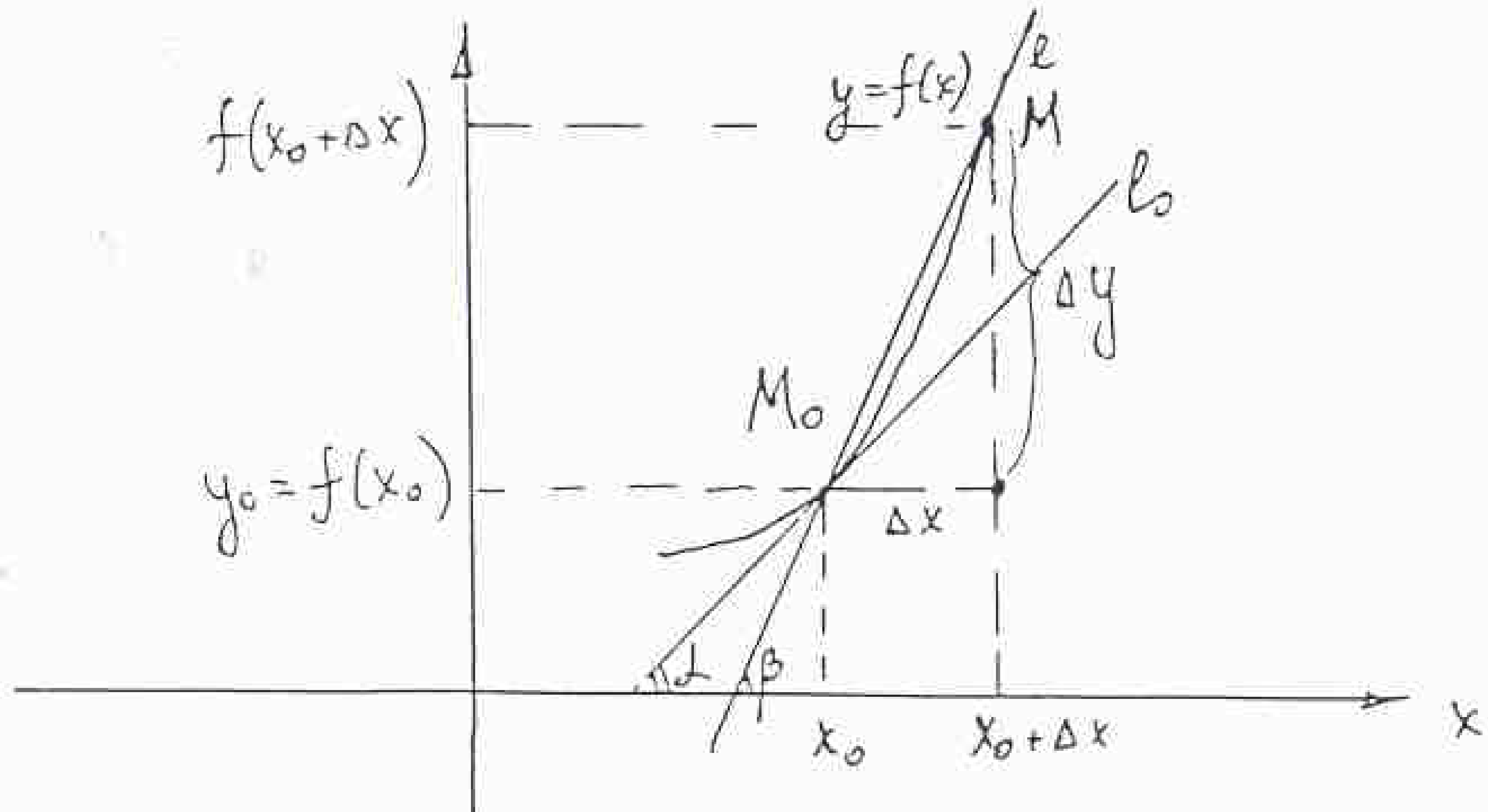
Геометрический смысл производной. Касательная.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в $U(x_0)$ и непрерывна в точке x_0.

Определение 8.2. Секущей к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0\left(x_0;f(x_0)\right)$ называется прямая, проходящая через точку M_0 и выбранную точку $M\left(x;f(x)\right)$. Уравнение секущей l имеет вид

$$y=k(\Delta x)\cdot(x-x_0)+y_0 \qquad (1),$$

где $k(\Delta x)$ — тангенс угла наклона секущей к положительному направлению оси Ox (рис. 8.1.).



Таким образом, из (1) имеем $k(\Delta x)=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=tg\,\beta$.

Определение 8.3. Касательной (l_0) к графику функции $y=f(x)$ в точке M_0 называется предельное положение секущей l.

Действительно (рис. 8.1), при $\Delta x\to 0$ длина $M_0M=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$, так как из непрерывности $y=f(x)$ следует, что при $\Delta x\to 0$ $\Delta y\to 0$. Таким образом, точка M стремится к точке M_0, а прямая l стремится занять положение касательной l_0.

Определение 8.4. Если существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = k_0$, то существует наклонная каса-льная к графику функции в точке M_0 и ее уравнение имеет вид $y = k_0 \cdot (x - x_0) + y_0$.

Если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \infty$, то имеется вертикальная касательная.

Таким образом, геометрический смысл производной функции $y = f(x)$ в точке M_0 — нгенс угла наклона касательной в этой точке $f'(x_0) = tg\,\alpha = k_0$.

Из вышесказанного вытекает следующая теорема.

Теорема 8.1. Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Наклонная касательная к графику фун-ции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ существует тогда и только тогда, когда $f(x)$ имеет конеч-ю производную в точке x_0, при этом уравнение касательной имеет вид

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \qquad (2).$$

Рассмотрим теперь несколько примеров вывода производных основных элементарных функ-ий.

Пример. Найти производную функции $y = \cos x$ в точке x. Рассмотрим

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = -\sin x.$$

Пример. Найти производную функции $y = x^n$, $n \in N$ в точке x. Рассмотрим

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + n x^{n-1} \Delta x + \ldots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = n x^{n-1}.$$

Упражнение. Вывести производные функций $\sin x$, a^x $(a > 0)$.

Теорема 8.2. Пусть в точке x существуют $f_1'(x)$, $f_2'(x)$, тогда

) $(f_1(x) \pm f_2(x))' = f_1'(x) \pm f_2'(x)$;

) $(f_1(x) \cdot f_2(x))' = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$;

) $\left(\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)' = \dfrac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{f_2^2(x)}$, $f_2(x) \neq 0$.

Доказательство. 1) следует непосредственно из свойства пределов. Докажем два других ойства.

2). $(f_1 \cdot f_2)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f_1(x + \Delta x) \cdot f_2(x + \Delta x) - f_1(x) \cdot f_2(x)}{\Delta x} =$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x + \Delta x) \cdot f_2(x + \Delta x) - f_1 \cdot f_2(x + \Delta x) + f_1 \cdot f_2(x + \Delta x) - f_1 \cdot f_2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_2(x + \Delta x)\,[f_1(x + \Delta x) - f_1(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x)\,[f_2(x + \Delta x) - f_2(x)]}{\Delta x} =$$

$= f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$.

3). $\left(\dfrac{f_1}{f_2}\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\dfrac{f_1(x + \Delta x)}{f_2(x + \Delta x)} - \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x + \Delta x) \cdot f_2 - f_1 \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2 - f_1 \cdot f_2(x + \Delta x)}{\Delta x \cdot f_2(x + \Delta x) \cdot f_2} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{f_2 [f_1(x+\Delta x) - f_1(x)]}{\Delta x \cdot f_2(x+\Delta x) \cdot f_2} - \frac{f_1 [f_2(x+\Delta x) - f_2(x)]}{\Delta x \cdot f_2(x+\Delta x) \cdot f_2} \right\} =$$

$$= \frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{f_2^2(x)}.$$

Упражнение. Используя арифметические свойства производных вывести производные функций $tg\, x$, $ctg\, x$, $ch\, x$, $sh\, x$, $th\, x$, $cth\, x$.

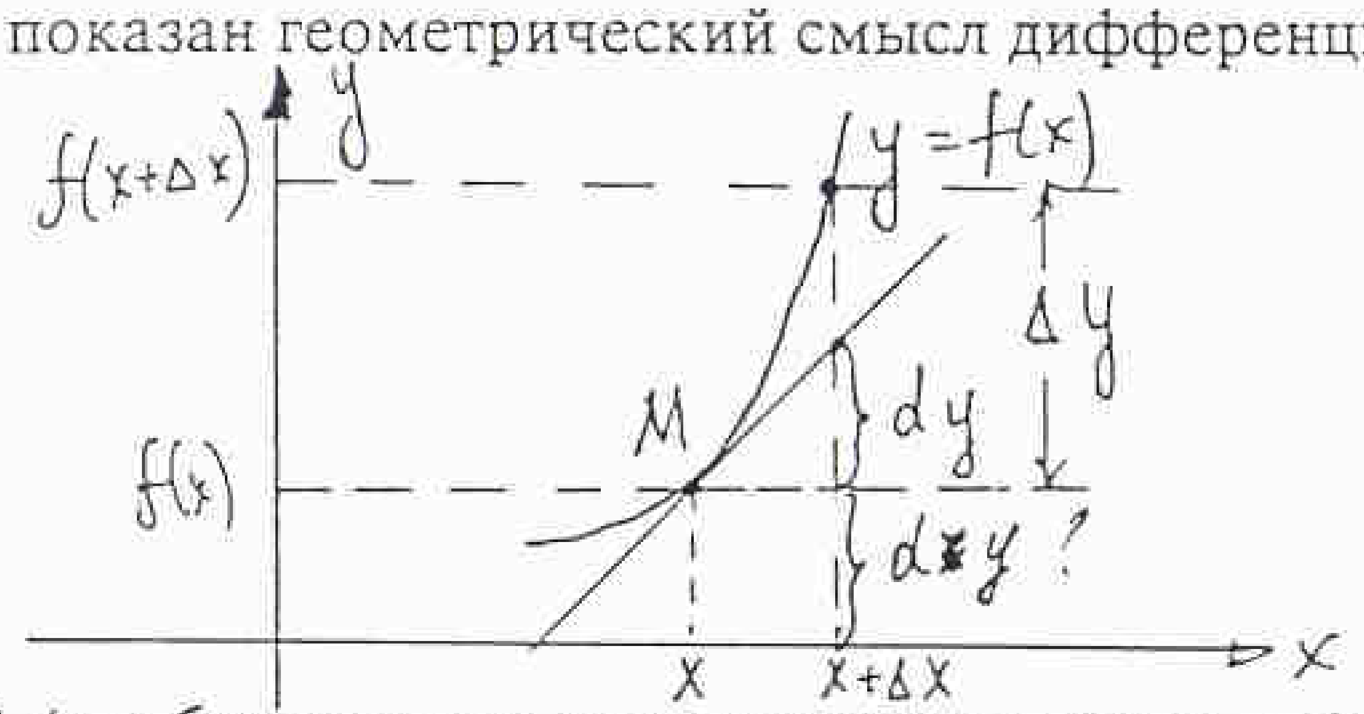
Дифференциал функции.

Определение 8.5. Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в некоторой окрестности точки x, если

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = A\,\Delta x + o(\Delta x) \qquad (3).$$

Определение 8.6.Главная линейная часть приращения функции $A\,\Delta x = dy$ называется дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x.

На рис. 8.2. показан геометрический смысл дифференциала функции.



Теорема 8.3 (необходимые и достаточные условия дифференцируемости). Для того, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в точке x, необходимо и достаточно существования производной в этой точке, причем в этом случае $dy = f'(x)\,dx$.

Доказательство (необходимость). $\Delta y = A\,\Delta x + o(\Delta x)$, $\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A = f'(x)$.

Доказательство (достаточность). Пусть $\exists f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, тогда (лемма 1 леция 5)

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$ следовательно $\Delta y = f'(x)\,\Delta x + o(\Delta x)$.

Т аким образом, $d\,y = f'(x)\,d\,x$, где $d\,x = \Delta x$.

Теорема 8.4 (о связи дифференцируемости и непрерывности). Если функция имеет производную в точке x, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0 \Rightarrow$

$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + o(\Delta x) \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Обратное вообще говоря неверно. Например, функция $|x|$ непрерывна для любого x, но не дифференцируема в точке $x = 0$.

Из Т.8.2 и О.8.6 следуют следующие формулы

$d(f_1 + f_2) = df_1 + df_2$;

$d(f_1 \cdot f_2) = f_1 \cdot df_2 + f_2 \cdot df_1$;

$$d\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{f_2 \cdot df_1 - f_1 \cdot df_2}{f_2{}^2}, \quad f_2 \neq 0.$$

Доказательство проводится самостоятельно.

Производная обратной функции.

Теорема 8.5 (о производной обратной функции). Пусть $y = f(x)$ определена, непрерывна строго монотонна в некоторой окрестности точки x и пусть существует отличная от нуля в чке x $f'(x)$. Тогда обратная функция функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в точ- $y = f(x)$ и

$$x'_y = \frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\dfrac{df(x)}{dx}} = \frac{1}{y'_x} \qquad (4).$$

Доказательство. Очевидно, что в силу теоремы 7.6 об обратной функции условия $\Delta x \to 0$ и $y \to 0$ эквивалентны, поэтому

$$x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}.$$

Упражнение. Вывести производные функций $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arc}tg\, x$, $\mathrm{arc}ctg\, x$, $\log_a x$.

$y = \arcsin x$

$x = \sin y$

$x'_y = \cos y$

$\frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$