Лекция 7. Непрерывность функции. Свойства непрерывных функций. Непрерывность элементарных функций. Точки разрыва. Свойства функций непрерывных на отрезке.

Определение 7.1. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если она определена в некотоой $U(x_0)$ и для любого
$>0\ \exists\delta(\varepsilon):\forall\ x:\left|x-x_0\right|<\delta(\varepsilon)\ \left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$.

Дадим теперь определение в терминах последовательностей.

Определение 7.2. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если она определена в некотоой $U(x_0)$, и для любой $\left\{x_n\right\}$, сходящейся к x_0, имеет место $\lim\limits_{x_n\to x_0} f(x_n)=f(x_0)$.

Эти определения практически всегда эквивалентны. Единственным исключением является лучай функции, определенной в изолированной точке.

Доказательство эквивалентности аналогично доказательству эквивалентности определений редела функции в точке.

Перефразируя определения 1 и 2 можно дать следующее определение непрерывности функии в точке, имеющее важное практическое применение.

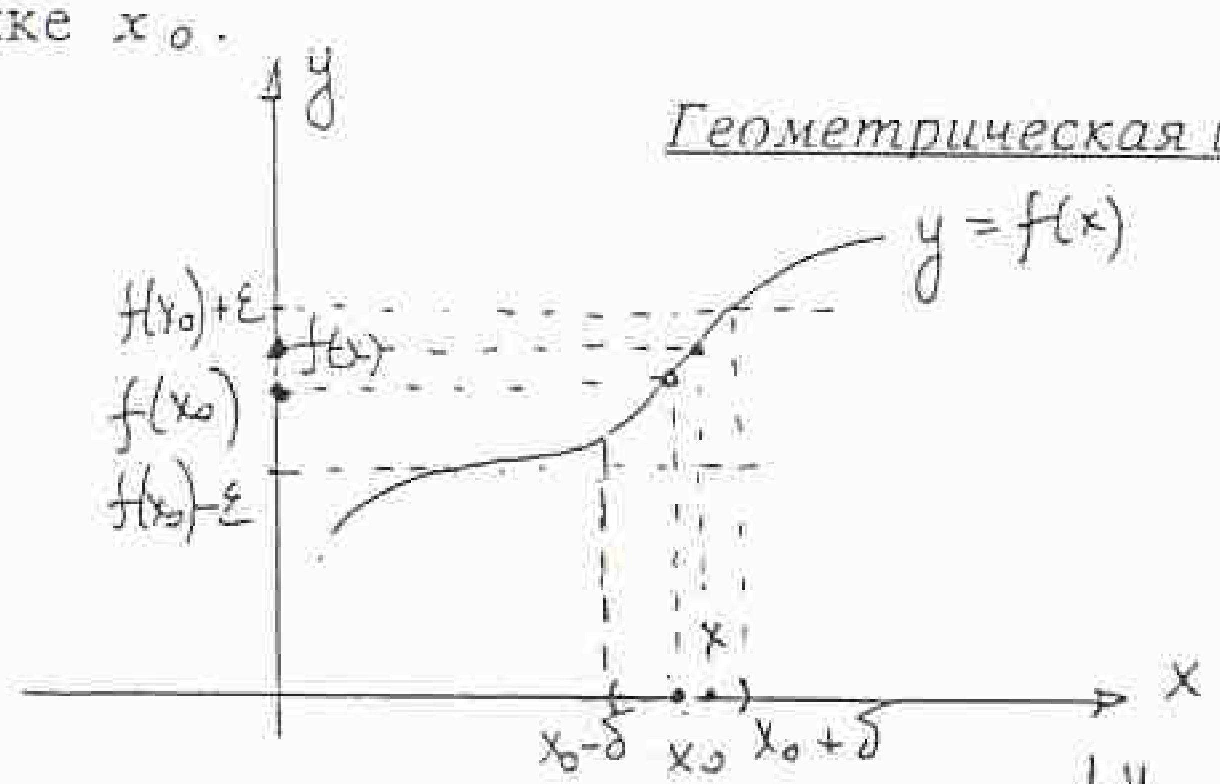
Определение 7.3. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если
) $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0;
) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
) выполняется $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и не является епрерывной в этой точке, т.е. не выполняются свойства, сформулированные в определении 1 ли 2, то говорят, что $f(x)$ разрывна в точке x_0.

Определение 7.4. Функция $f(x)$ разрывна в точке x_0, если она определена в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и существует $\varepsilon_0>0$ такое, что для любого $\delta>0$ существует точка x_δ таая, что $|x_0-x_\delta|<\delta$, но $\left|f(x_\delta)-f(x_0)\right|\geq\varepsilon_0$.

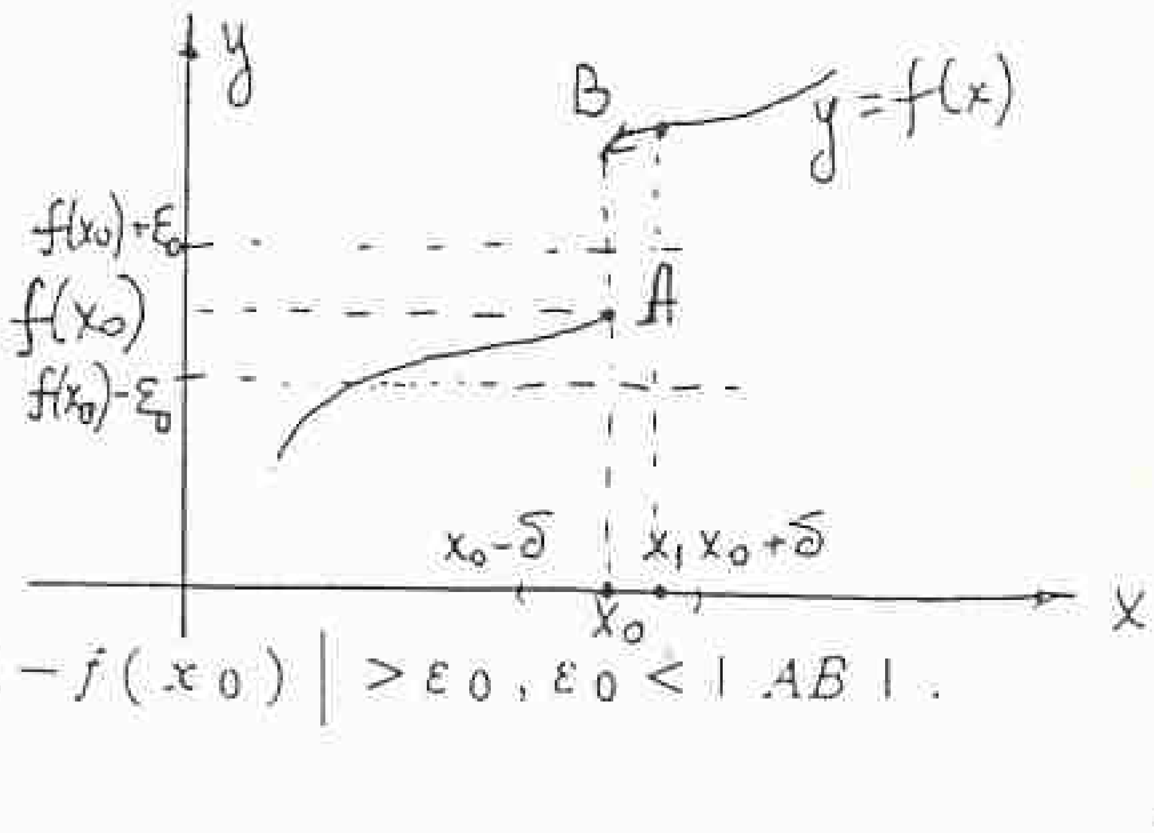
Если $f(x)$ не определена в точке x_0 тем более не может идти речи о непрерывности $f(x)$ в точке x_0.

Геометрическая иллюстрация.



$f(x)$ непрерывна в т. x_0

рис.1.



$f(x)$ разрывна в т. x_0

рис.2. $0<x_1-x_0<\delta$, но $\left|f(x_1)-f(x_0)\right|>\varepsilon_0$, $\varepsilon_0<|AB|$.

Разность $\Delta x = x - x_0$ называют приращением аргумента.

Определение 7.5. Разность $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ обозначается Δy или $\Delta f(x)$ и называется приращением функции $f(x)$ в точке x_o, соответствующим приращению Δx независимой переменной, т.е. $\Delta f(x) = \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Отметим, что в приведенном определении имеется в виду, что точка x_o и точка $x = \Delta x + x_0$ принадлежат области определения функции $f(x)$, а само приращение $\Delta f(x)$ зависит от Δx, при фиксировании точки x_o.

На языке приращений можно дать еще одно определение непрерывности функции в точке x_o.

Определение 7.6. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_o, если она определена в некоторой $U(x_o)$, и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(f(x_0 + \Delta x) - f(x) \right) = 0$.

Иными словами, для непрерывной функции бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Доказательство эквивалентности введенных определений непрерывности функции в точке основано на известных свойствах пределов и предоставляется для самостоятельного упражнения.

Из свойств предела функции и определения непрерывности непосредственно следует теорема.

Теорема 7.1. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_o, то в этой точке непрерывны $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$ и при условии $\varphi(x_0) \neq 0$ непрерывна $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Сформулируем и докажем теорему о непрерывности сложной функции.

Теорема7.2. Если $\varphi(x)$ непрерывна в x_o, а $f(y)$ непрерывна в точке $y_o = \varphi(x_o)$, то $F(x) = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_o.

Доказательство. Так как $y = \varphi(x)$ непрерывна в x_o, а $f(y)$ непрерывна в точке $y_o = \varphi(x_o)$ и $F(x_o) = f(\varphi(x_o))$, то для любой $\{x_n\} \to x_o$ справедливо $y_n = \varphi(x_n) \to y_0$, $f(y_n) \to f(y_0)$, т.е.

$$\lim_{x_n \to x_o} F(x_n) = \lim_{\varphi(x_n) \to \varphi(x_o)} f(\varphi(x_n)) = f(\varphi(x_o)) = F(x_o).$$

Данную теорему можно рассматривать как правило замены переменного для вычисления пределов сложных функции.

Пример. $f(x) = c = const$. Эта функция, очевидно, является непрерывной в любой точке. Действительно $\Delta y = c - c = 0$ и естественно $\Delta f \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Пример. $f(x) = x^n$. И эта функция, очевидно, является непрерывной в любой точке. Действительно $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left((x + \Delta x)^n - x^n \right) = 0$.

Пример. $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + x^3 \right)^{\frac{1}{x^3}} = \lim\limits_{t \to 0} \left(1 + t \right)^{\frac{1}{t}} = e$, $(t = x^3)$.

Пример. Алгебраический многочлен $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ непрерывен в любой точке числовой оси по теореме о непрерывности суммы и произведения непрерывных функций.

Пример. Рациональная функция $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$ непрерывна для всех x, для которых $Q(x)\neq 0$.

Пример. $sinx$, $cosx$ - непрерывны на всей числовой оси.

Доказательство. Например, для функции $f(x)=\sin x$

$$\left|\sin(x+\Delta x)-sinx\right|=2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leq\Delta x.$$

Пример. tgx ($cosx\neq 0$), $ctgx$ ($sinx\neq 0$) непрерывны в области их определения.

Теперь подробнее рассмотрим показательную и логарифмическую функции.

Пусть $a>0$ и x — произвольное действительное число. Пусть $\{r_n\}$ — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x. Тогда по определению $a^x=\lim\limits_{n\to\infty}a^{r_n}$.

Пусть задано $a>0$. Функция a^x, определенная для любого $x\in(-\infty,+\infty)$, называется показательной функцией с основанием a.

Показательная функция a^x обладает следующими свойствами:

1. При $a>1$ монотонно возрастает, при $0<a<1$ монотонно убывает;
2. $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$, для любых вещественных x и y;
3. $(a^x)^y=a^{x\cdot y}$, для любых вещественных x и y;
4. Непрерывна в каждой точке.

<u>Определение 7.7.</u> Функция $f(x)$ называется непрерывной слева (справа) в точке x_0, если $f(x)$ определена на интервале $(t,x_0]$ $\big([x_0,t)\big)$ и $\exists\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$ (соответственно $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$).

Пример. Доказать, что функция $f(x)=\sqrt{x}$ непрерывна в точке $x=0$ справа.

Для любого $\varepsilon>0$ выбираем $\delta=\varepsilon^2$, тогда из неравенства $0\leq x<\varepsilon^2$ следует $|\sqrt{x}|<\varepsilon$

<u>Точки разрыва.</u>

<u>Определение 7.8</u>. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв 1-го рода, если она определена в некоторой $U(x_0)$ и существуют конечные

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)\text{ и }\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0).$$

Величина $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется скачком функции $f(x)$ в точке x_0. Если $f(x_0+0)=f(x_0-0)$, то x_0 —точка устранимого разрыва.

Отметим, что функция может быть не определена в точке x_0.

Точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва 1-го рода, называется точкой разрыва 2-го рода, т.е. не существует или равен бесконечности хотя бы один из односторонних пределов.

Пример. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, точка $x=0$ — точка разрыва первого рода.

Пример. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, но функция не определена в точке $x=0$ — точка устранимого разрыва.

Пример. $f(x) = \dfrac{|x| - x}{x^2} = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ -\dfrac{2}{x}, & x < 0 \end{cases}$. Таким образом,

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = +\infty$ $\Rightarrow x = 0$ точка разрыва 2-го рода.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Определение 7.9. Функция называется непрерывной на отрезке, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка, причем на границах непрерывность понимается справа и слева соответственно.

Теорема 7.3. Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на нем.

Доказательство. Допустим $f(x)$ не ограничена на $[a, b]$. Это означает, что для каждого натурального n найдется

$$x_n \in [a, b] : \left| f(x_n) \right| > n \ (n = 1, 2, \dots) \qquad (1).$$

Но $\{x_n\}$ ограничена ($a \le x_n \le b$). Следовательно по Т.4.3. можно выделить $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к точке $\beta \in [a, b]$. Но по условию теоремы в β функция непрерывна и $\lim\limits_{n_k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(\beta)$, значит она ограничена, но это противоречит (1).

Если функция непрерывна на интервале, то она может быть не ограничена. Например, $\dfrac{1}{x}$ в интервале $(0, 1)$.

Теорема 7.4. (Вейерштрасс). Всякая непрерывная на отрезке функция достигает на этом отрезке минимального и максимального значений.

Доказательство. По предыдущей теореме $f(x)$ ограничена, значит $\exists M = \sup\limits_{[a, b]} f(x)$. Допустим, что функция $f(x)$ не достигает M на отрезке $[a, b]$. Но тогда $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ непрерывна ($f(x) \ne M$) и ограничена на отрезке $[a, b]$. По определению точной верхней грани для любого $\varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in [a, b] : 0 < M - f(x) < \varepsilon \Rightarrow \varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)} > \dfrac{1}{\varepsilon}$, но это означает, что $\varphi(x)$ не ограничена. Получено противоречие.

Если функция непрерывна на интервале, то она может не достигать ни максимума ни минимума. Например, $f(x) = x$ в интервале $(0, 1)$.

Теорема 7.5. (Больцано-Коши о промежуточных значениях). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) = A$ и $f(b) = B$, а C — произвольное число, заключенное между A и B. Тогда существует $c \in [a, b] : f(c) = C$.

Доказательство. Пусть для определенности $f(a) < f(b)$ ($A < C < B$). Разделим отрезок $[a, b]$ пополам точкой x_0. Если $f(x_0) = C$, то искомая точка найдена. Если $f(x_0) \ne C$, то на концах одной из половинок исходного отрезка функция принимает значения, лежащие по разные стороны от числа C, точнее — на левом конце значение, меньшее C, на правом — большее.. Делим эту половинку снова пополам и т.д. В результате либо через конечное число шагов придем к искомой точке c, в которой $f(c) = C$, либо получим систему вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ с длиной стремящейся к нулю, таких что

$$f(a_n) < C < f(b_n) \qquad (2).$$

Известно (Т.2.6), что существует такая точка c, что $c = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n$, и в силу непрерывности функции $f(x)$ в (2) можно перейти к пределу и $f(c) = C$ по теореме о двух милиционерах.

Иначе говоря, функция, непрерывная на отрезке, принимающая какие-либо два значения, принимает и все значения, лежащие между ними.

Следствие 1. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и значения $f(a), f(b)$ разных знаков, то существует точка $c \in [a, b] : f(c) = 0$.

Следствие 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $\max\limits_{[a,b]} f(x) = M$, $\min\limits_{[a,b]} f(x) = m$, то функция принимает все значения на отрезке $[m, M]$ и только эти значения.

Таким образом, множество значений функции, заданной и непрерывной на отрезке, есть отрезок.

Определение 7.10. Пусть $f(x)$ определена на множестве X и Y — множество значений $f(x)$, и $f^{-1}(y) = \left\{ x : x \in X,\ f(x) = y \right\}$. Тогда функция, определенная на Y и, ставящая в соответствие каждому $y \in Y$ множество $f^{-1}(y)$, называется обратной к f и обозначается f^{-1}.

Теорема 7.6. Пусть $f(x)$ определена, строго возрастает и непрерывна на $[a, b]$, тогда $f^{-1}(y)$ определена, однозначна, строго возрастает и непрерывна на $[f(a), f(b)]$.

Абсолютно аналогично теорема формулируется в случае убывающей функции.

Пример. Обратные тригонометрические функции непрерывны в области их определения.

Функция обратная к показательной $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) называется логарифмической.

$y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) определена и непрерывна для всех $x > 0$, при $a > 1$ — возрастает, при $0 < a < 1$ — убывает.

Пусть задано действительное α. Функция x^{α}, определенная для всех $x > 0$, называется степенной функцией с показателем α.

Очевидно, что так как $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$, то степенная функция монотонна, непрерывна и возрастает при $x > 0$.