Лекция 6. Теоремы о пределах функции. О–символика. Эквивалентность. Основные эквивалентности.

Теоремы о пределах.

Теорема 6.1. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где A - конечное число, то на некоторой $\tilde{U}(x_0)$ функция $f(x)$ ограничена, т.е. $\exists M : |f(x)| \le M$, для всех $x \in \tilde{U}(x_0)$.

Доказательство. Из условия теоремы при

$\varepsilon = 1$, $|f(x)| - |A| \le |f(x) - A| < 1 \quad (x \in \tilde{U}(x_0))$.

Следовательно $|f(x)| < 1 + |A| = M$.

Теорема 6.2. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $A \ne 0$ - конечное число, то существует $\tilde{U}(x_0)$, такая, что $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$ для всех $x \in \tilde{U}(x_0)$. Более того, для указанных x $f(x) > \frac{A}{2}$, если $A > 0$ и $f(x) < \frac{A}{2}$, если $A < 0$.

Доказательство. Из существования предела функции следует, что для $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$ существует $\tilde{U}(x_0)$ такая, что для всех $x \in \tilde{U}(x_0)$ выполняется

$\frac{|A|}{2} > |A - f(x)| \ge |A| - |f(x)|$ откуда $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$. Первое из этих неравенств можно заменить следующими $A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2}$ откуда, если $A > 0$, то $f(x) > \frac{A}{2}$ и если $A < 0$, то $f(x) < \frac{A}{2}$.

Теорема 6.3. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A_2$ и $\exists \bar{U}(x_0)$, где $f_1(x) \le f_2(x)$ для любого $x \in \bar{U}(x_0)$, то $A_1 \le A_2$.

Доказательство. $x_n \to x_0$, $x_n \ne x_0$, тогда существует n_0: для всех $n > n_0$ $x_n \in \bar{U}(x_0)$ и последовательность $f_1(x_n) \le f_2(x_n)$, $n > n_0$ и после перехода к пределу по Т.3.4. (Лекция №3) имеем: $A_1 \le A_2$.

Теорема 6.4. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A$ и $\exists \bar{U}(x_0)$, где

$A - \varepsilon < f_1 < \varphi(x) < f_2 < A + \varepsilon$

$f_1(x) \le \varphi(x) \le f_2(x)$ для любого $x \in \bar{U}(x_0)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$.

Доказательство аналогично доказательству Т.6.3 и соответствующего свойства пределов последовательностей (теорема 3.5 о двух милиционерах).

Теорема 6.5. (Критерий Коши). Для существования конечного $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была определена в некоторой $U(x_0)$ за исключением быть может самой точки x_0 и для любого $\varepsilon>0$

$\exists \tilde{U}(x_0)$: для любых $x', x'' \in \tilde{U}(x_0)$ выполнялось $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

Доказательство. Необходимость. Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ тогда в некоторой окрестности точки x_0 определена функция $f(x)$ и для любого $\varepsilon>0 \ \exists \tilde{U}(x_0)$ такая, что для $\forall x, x', x'' \in \tilde{U}(x_0)$ выполняется $|f(x')-A|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}$. Но тогда $|f(x')-f(x'')| \le |f(x')-A| + |A-f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

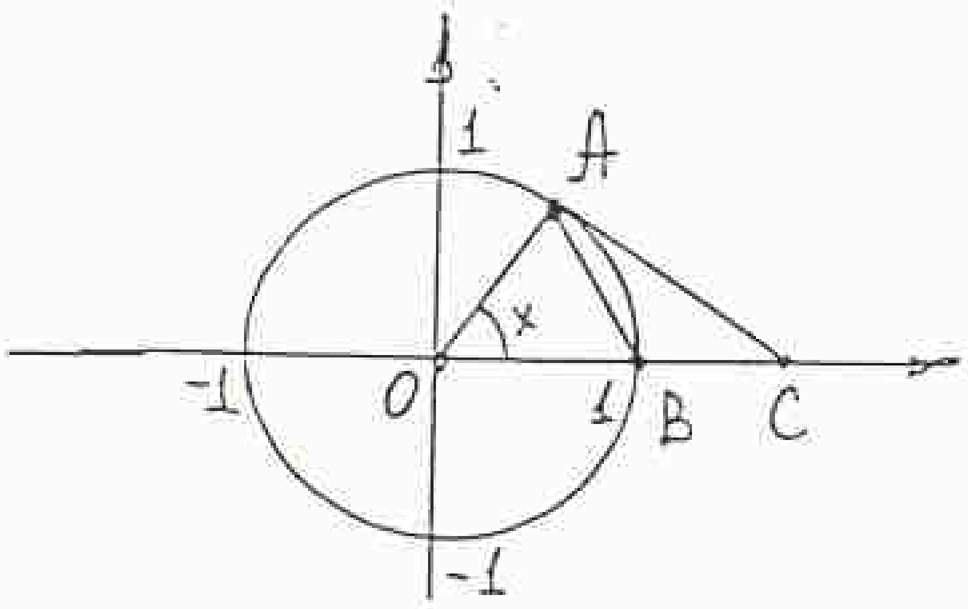
Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы: $f(x)$ определена в некоторой $U(x_0)$ за исключением быть может самой точки x_0 и для любого $\varepsilon>0 \ \exists \tilde{U}(x_0)$ такая, что для любых $x', x'' \in \tilde{U}(x_0)$ выполняется $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. Выберем произвольную последовательность $x_n \to x_0$, $x_n \ne x_0$. Тогда найдется такое N, что для любых $m, n > N$ будет $x_n, x_m \in \tilde{U}(x_0)$. Но тогда в силу условия теоремы $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$ для любых $m, n>N$ и последовательность $\{f(x_n)\}$ по критерию Коши для последовательностей имеет предел.

Осталось показать, что если для последовательности $x_n \to x_0$, $x_n \ne x_0$ выполняется $f(x_n)\to A$, а для $x'_n \to x_0$, $x'_n \ne x_0$ выполняется $f(x'_n)\to A'$, то $A=A'$. Этот факт следует из того, что для последовательности $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots, x_n, x'_n \dots \to x_0$ по вышедоказанному существует предел соответствующей последовательности $f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \dots, f(x_n), f(x'_n)\dots$, что возможно только, если $A=A'$.

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta_\varepsilon \ \forall x', x'' \quad a<|x'-a_n|<\delta$

Замечательные пределы.

1-й замечательный предел.



$\breve{AB}=x$

Из рис.1. следует следующая цепочка неравенств при $0<x<\frac{\pi}{2}$:

$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\sin x < S_{\text{сект } OAB}=\frac{1}{2}x < S_{\Delta OAC}=\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Из последнего следует, что $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, следовательно $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$ или $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$. Так как $\cos x$, $\frac{\sin x}{x}$ четные функции, то последнее неравенство верно и для $-\frac{\pi}{2}<x<0$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ $\left(|1-\cos x| = 2\sin^2\frac{x}{2} \le \frac{x^2}{2}\right)$, то по теореме о двух милиционерах существует $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{7x}=\frac{\sin 5x}{\frac{7}{5}\cdot 5x}=\frac{5}{7}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$

Следствие 1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, x}{x} = 1$.

Следствие 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$.

Следствие 3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctg\, x}{x} = 1$.

Пример. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{\arcsin 8x} = \dfrac{5}{8} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{5x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{8x}{\arcsin 8x} = \dfrac{5}{8}$.

II-й замечательный предел.

Установим теперь следующий важный факт $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Прежде всего напомним, что имеет место равенство $\lim\limits_{n_k \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e$, где n_k произвольная последовательность натуральных чисел, растущих вместе с номером k до бесконечности.

Пусть теперь x пробегает какую-нибудь последовательность значений $\{x_k\}$, стремящихся к $+\infty$; можно даже считать, что все $x_k > 1$. Положим $n_k = [x_k]$ так что $n_k \le x_k < n_k + 1$ и $n_k \to +\infty$. Так как при этом $\dfrac{1}{n_k+1} < \dfrac{1}{x_k} \le \dfrac{1}{n_k}$, то

$$\left(1 + \frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} \le \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} \qquad (3).$$

Преобразуем оба крайних выражения следующим образом

$$\left(1 + \frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\left(1 + \frac{1}{n_k+1}\right)}, \quad \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \cdot \left(1 + \frac{1}{n_k}\right).$$

Теперь, переходя к пределу в неравенстве (3) получим по теореме о двух милиционерах, что $\lim\limits_{x_k \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x_k}\right)^{x_k} = e$. Этим и завершается доказательство на языке последовательностей.

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Следствие 1. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Пример. $\lim\limits_{x \to 0} \ln (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Из этого примера следует $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x \ln a} = 1$;

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a (1 + x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$.

О-символика. Эквивалентность.

Определение 6.1. Если для $f(x)$ и $\varphi(x)$ $\exists \tilde{U}(x_0)$, в которой эти функции определены, и выполняется $|f(x)| \le c\,|\varphi(x)|$, то пишут

$$f(x) = O(\varphi(x)) \qquad (1)$$

Определение 6.2. Если $f(x) = O(\varphi(x))$ и $\varphi(x) = O(f(x))$, то $f(x)$ и $\varphi(x)$ одного порядка при $x \to x_0$.

Теорема 6.6. Если $f(x) \ne 0$, $\varphi(x) \ne 0$ при $x \in \tilde{U}(x_0)$ и

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = c \ne 0 \qquad (2),$$

то $f(x)$ и $\varphi(x)$ одного порядка при $x \to x_0$.

Доказательство. Из (1) и леммы 5.1 о связи функции и ее предела следует, что $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = c + \alpha_1(x)$, $\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{c} + \alpha_2(x)$, где $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ — б/м, и, следовательно ограниченные: $|\alpha_1(x)| < 1$, $|\alpha_2(x)| < 1 \Rightarrow$

$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right| \le |c| + 1$, $\left|\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right| \le \frac{1}{|c|} + 1$. Из первого следует, что $f(x) = O\left(\varphi(x)\right)$, а из второго — $\varphi(x) = O\left(f(x)\right)$.

Очевидно, что если $f(x) = O(1)$ в $\tilde{U}(x_0)$, то $f(x)$ —ограничена в $\tilde{U}(x_0)$.

Пример. $3x^2 + 4x^3 = O(x^2)$, $x \to 0$, $3x^2 + 4x^3 = O(x^3)$, $x \to +\infty$.

Определение 6.3. Две функции $f(x)$, $\varphi(x)$, определенные и не равные нулю в $\tilde{U}(x_0)$, называются эквивалентными при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$. Эквивалентность обозначается $f(x) \sim \varphi(x)$.

Эквивалентность обычно используется для сравнения б/м с б/м и б/б с б/б.

Достаточно очевидными являются следующие свойства эквивалентных функций при $x \to x_0$.

1°. $f(x) \sim f(x)$;

2°. если $f(x) \sim \varphi(x)$, то $\varphi(x) \sim f(x)$; транзитивность

3°. если $f(x) \sim \varphi(x)$ и $\varphi(x) \sim g(x)$, то $f(x) \sim g(x)$.

Используя свойство 3° можно написать следующую цепочку при $x \to 0$:

таблица основных эквивалентностей.

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \qquad (3).$$

Эти соотношения остаются в силе при $x \to x_0$, если заменить в них x на функцию $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Пример. $(1+x)^m - 1 = e^{m\ln(1+x)} - 1 \sim m\ln(1+x) \sim mx$, $x \to 0$.

Определение 6.4. Если для $f(x)$ и $\varphi(x)$ $\exists \tilde{U}(x_0)$, в которой эти функции определены, и выполняется

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \alpha(x), \quad \alpha(x) \text{ — б/м при } x \to x_0 \qquad (4),$$

то функцию f называют бесконечно малой по сравнению с функцией φ при $x \to x_0$ и пишут

$$f(x)=o\left(\varphi(x)\right),\quad x\to x_0 \tag{5}$$

В частности, запись $f(x)=o\left(1\right)$, $x\to x_0$ означает, что $f(x)$ —б/м при $x\to x_0$.

Если $\varphi(x)\neq 0$, $x\in\tilde{U}(x_0)$, то можно дать определение эквивалентное определению 6.4.

Определение 6.5. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=0$, то говорят, что $f(x)=o\left(\varphi(x)\right)$, $x\to x_0$.

Очевидно, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{o(\varphi(x))}{\varphi(x)}=0$.

Следует иметь в виду, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, о которых идет речь в (4), не обязательно являются бесконечно малыми при $x\to x_0$.

Пример. $x^2=o(x^4)$, $x\to\infty$.

В случае, когда функция φ в (4) является бесконечно малой, говорят, что f — бесконечно малая более высокого порядка, чем φ.

В случае, когда функции φ и f в (4) являются бесконечно большими при $x\to x_0$, то говорят, что φ — бесконечно большая более высокого порядка, чем f.

Отметим некоторые свойства символа $o(\varphi)$, считая, что $x\to x_0$, а C – постоянная.

1°. $o\left(C\varphi\right)=C\,o\left(\varphi\right)$;

2°. $o\left(\varphi\right)+o\left(\varphi\right)=o\left(\varphi\right)$;

3°. $o\left(o(\varphi)\right)=o\left(\varphi\right)$;

4°. $o\left(\varphi^n\right)\cdot o\left(\varphi^m\right)=o\left(\varphi^{n+m}\right)$, $m,n\in N$;

5°. $\left(o(\varphi)\right)^n=o\left(\varphi^n\right)$, $n\in N$.

Доказательство этих свойств предоставляется для самостоятельного упражнения.

Следующая теорема устанавливает связь между эквивалентностью и сравнением бесконечно малых.

Теорема 6.7. Для того, чтобы две функции $f(x)$, $\varphi(x)\neq 0$, при $x\neq x_0$ были эквивалентными при $x\to x_0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий : $\varphi-f=o(f)$ или $\varphi-f=o(\varphi)$.

Доказательство. (Необходимость). Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=1$, тогда

$$\lim_{x\to x_0}\left[1-\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]=0=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{\varphi(x)-f(x)}{\varphi(x)}\right]\Rightarrow\varphi-f=o(\varphi).$$

(Достаточность). Пусть $\varphi-f=o(\varphi)$, тогда, разделив на φ имеем

$$1-\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{o(\varphi(x))}{\varphi(x)}\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\left[1-\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]=0\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]=1.$$

Теперь сформулируем и докажем теорему, позволяющую использовать эквивалентность для нахождения пределов функций.

Теорема 6.8. Пусть $f\sim f_1$ и $\varphi\sim\varphi_1$, при $x\to x_0$, $\varphi(x)\neq 0$, $\varphi_1(x)\neq 0$, $x\in\tilde{U}(x_0)$. Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1}{\varphi_1}$, то существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f}{\varphi}$ и они равны между собой .

Доказательство. Из Т.6.7 следует, что $f=f_1+o(f_1)$, $\varphi=\varphi_1+o(\varphi_1)$, следовательно

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f}{\varphi}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1+o(f_1)}{\varphi_1+o(\varphi_1)}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f_1}{\varphi_1}\;\frac{1+\dfrac{o(f_1)}{f_1}}{1+\dfrac{o(\varphi_1)}{\varphi_1}}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1}{\varphi_1}.$$

$O(x+x^2)=O(x)$

по таблице эквивалентн

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x^2}-1}{\cos x-\cos 5x}=\dfrac{7}{12}$. $=\dfrac{e^{7x^2}-1}{-2\sin 3x\cdot\sin 2x}=\dfrac{7x^2}{12x^2}=\dfrac{7}{12}$

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\arcsin 3x-5x^3}{\sin 2x+tg^2 x+(e^x-1)}=\dfrac{4}{3}$. $=\dfrac{(x+x^2)+3x-5x^3+3O(x)}{2x+x^2+x+O(x)}$

$\ln(1+x+x^2)=x+x^2+o(x+x^2)$,

но $o(x+x^2)=o(x) \Rightarrow \ln(1+x+x^2)=x+o(x)$ и т.д.

Необходимо отметить, что не всегда заменав сумме функций на эквивалентные приводит к необходимому результату.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\operatorname{arctg} 2x-(e^{3x}-1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2x+o(x)-3x+o(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^2}=?$$

Как видно, для нахождения предела требуется дополнительное исследование.