Лекция 4. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса. Теорема Штольца. Подпоследовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Верхние и нижние пределы. Критерий Коши.

Определение 4.1. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей* (невозрастающей), если для всякого n, $x_{n+1} \geq x_n$ ($x_{n+1} \leq x_n$).

Теорема 4.1. (Вейерштрасса) Всякая ограниченная сверху (снизу) неубывающая (невозрастающая) последовательность имеет предел.

Доказательство. Пусть, для определенности x_n неубывающая и ограничена сверху. Из ограниченности сверху последовательности следует, что множество значений элементов последовательности — ограниченное сверху множество. Следовательно по теореме 2.1 существует $M = sup\{x_n\}$. Возьмем $M' < M$. По определению точной верхней грани: 1) для любого $n \in N$ имеет место $x_n \leq M$ и 2) существует номер n' такой, что $M' < x_{n'} \leq M$. В силу того, что последовательность неубывающая такое неравенство справедливо для всех $n > n'$. А это в силу произвольности выбора $M' < M$ и означает, что последовательность x_n имеет предел и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = sup\{x_n\}$.

Доказанная теорема является теоремой существования и не дает методов для непосредственного вычисления пределов. Однако, зачастую одно знание о существовании предела позволяет его найти или указать границы его существования.

Число e

Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Покажем, что эта последовательность сходится.

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

При переходе от x_n к x_{n+1} число слагаемых увеличивается на одно и т.к. $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ увеличивается и каждое слагаемое, следовательно $x_{n+1} > x_n$, т.е. последовательность неубывающая.

Теперь воспользовавшись двумя неравенствами $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ и $1 - \frac{s}{n} < 1$, $s > 0$ получим

$$2 < x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{1}{2}\,\frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} < 3.$$

Таким образом, рассматриваемая последовательность неубывающая и ограничена сверху, т.е. по теореме Вейерштрасса имеет предел. Этот предел получил специальное обозначение e. Число e имеет большое значение в математическом анализе и его приложениях. Отметим попутно, что e — иррационально.

Пример. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$, $x_n = q^n$, $0 < q < 1$. Докажем, что последовательность невозрастающая. Действительно, $x_{n+1} = q x_n$ и т.к. $0 < q < 1$, то $x_{n+1} < x_n$. С другой стороны

$x_n \geq 0$ и по теореме 4.1. имеет предел $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Но и $\lim\limits_{n \to \infty} x_{n+1} = a$. Поэтому из равенства $x_{n+1} = q x_n$ при переходе к пределу следует, что $a = q a$, что возможно только при $a = 0$.

Пример. Найти $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{0}^{n} q^k$, $0 < q < 1$. Запишем пример в виде

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^n \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^n)}{(1-q)} \right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) = \frac{1}{1-q}.$$

Сформулирум теперь теорему, имеющую важное практическое применение.

Теорема 4.2. (теорема Штольца). Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = +\infty$, и начиная с некоторого n последовательность y_n монотонна $(y_{n+1} > y_n)$. Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$, если только существует предел справа (конечный или даже бесконечный).

с 4-[illegible].

Пример. Найти $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2^n}{n^2}$. Применим два раза теорему Штольца.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{2n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{2} = \infty.$$

Пример. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$. Найти $\lim\limits_{n \to \infty} \xi_n$, где $\xi_n = \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n}$. Применим теорему Штольца. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{z_{n+1}}{1} = a$.

Определение 4.2. Пусть задана последовательность $\{x_n\}$. Последовательность $\{x_{n_k}\}$, составленная из элементов последовательности $\{x_n\}$ и в которой порядок следования ее элементов совпадает с их порядком следования в исходной последовательности $\{x_n\}$, называется подпоследовательностью этой последовательности.

Таким образом, последовательность $\{x_{n_k}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$ если $n_{k_1} < n_{k_2}$ тогда и только тогда, когда $k_1 < k_2$.

Теорема 4.3. (Больцано - Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $a \leq x_n \leq b$. Делим отрезок $[a, b]$ пополам. Хотя бы одна из половинок содержит бесконечно много элементов $\{x_n\}$. Обозначаем эту половину $[a_1, b_1]$. Выберем на этом отрезке элемент исходной последовательности с наименьшим номером и обозначим этот номер n_1. Тогда $a_1 \leq x_{n_1} \leq b_1$. Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и обозначим половину, которая содержит бесконечно много элементов $[a_2, b_2]$. Из элементов, принадлежащих этому отрезку и имеющих номера большие, чем n_1 выберем элемент исходной последовательности с наименьшим номером, который обозначим n_2, $n_2 > n_1$. $a_2 \leq x_{n_2} \leq b_2$. Продолжив эту процедуру получим подпоследовательность x_{n_k}, $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ и систему вложенных отрезков $[a_k, b_k]$ с длиной, стремящейся к нулю $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \to 0,\ k \to \infty$. По теореме 2.6 существует единственная точка c принадлежащая всем отрезкам и $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = c$. Но $a_k \le x_{n_k} \le b_k$, следовательно $\lim\limits_{n_k\to\infty} x_{n_k} = c$.

Теорема 4.4. Если последовательность имеет предел (конечный или бесконечный), то любая подпоследовательность этой последовательности сходится к этому пределу.

Доказательство. Действительно, по определению предела последовательности в любой окрестности этого предела находится бесконечно много элементов последовательности, а вне этой окрестности только конечное число элементов. Но это справедливо и для любой подпоследовательности рассматриваемой последовательности.

Теорема 4.5. Если последовательность $\{x_n\}$ такова, что любая ее подпоследовательность сходится (к конечному или бесконечному числу), то существует предел (конечный или бесконечный) последовательности.

Доказательство. В самом деле, если бы это было не так, то нашлись бы две подпоследовательности сходящиеся к разным числам. Составим новую подпоследовательность, являющуюся объединением этих двух подпоследовательностей. Новая подпоследовательность является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$ и, заведомо, расходится, и мы пришли к противоречию с тем, что предполагалось, что все подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ сходятся.

Определение 4.3. Число a (конечное или бесконечное) называется верхним (нижним) пределом последовательности действительных чисел $\{x_n\}$, если существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к нему, и при этом всякая другая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ сходится к числу не большему (не меньшему), чем a.

Верхний и нижний пределы обозначаются соответственно $\overline{\lim}\ x_n$ и $\underline{\lim}\ x_n$.

Пример. Последовательность $\{1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ имеет верхний предел равный 4 и нижний предел равный 1.

Верно следующее утверждение.

Утверждение. Всякая последовательность имеет конечный или бесконечный верхний и нижний пределы.

Следующая теорема устанавливает связь между пределом последовательности и ее верхним и нижними пределами.

Теорема 4.6. Верны следующие утверждения

$\overline{\lim}\ x_n \ge \underline{\lim}\ x_n$;

если существует конечный или бесконечный $\lim x_n$, то $\overline{\lim}\ x_n = \underline{\lim}\ x_n = \lim x_n$;

если $\overline{\lim}\ x_n = \underline{\lim}\ x_n$, то $\overline{\lim}\ x_n = \underline{\lim}\ x_n = \lim x_n$.

Теперь сформулируем критерий, аналогами которого мы будем пользоваться довольно час-

Опр. е по Коши.
необходимое и дост. [illegible] предела
последовательности

<u>Теорема 4.7</u>. Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла свойству Коши, т.е. для любого $\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon$: для любых n', n'': $n' > n_\varepsilon$, $n'' > n_\varepsilon$ верно $|x_{n'} - x_{n''}| < \varepsilon$.

Последовательность, удовлетворяющая условию Коши — фундаментальная последовательность.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда для произвольного положительного числа ε найдется такое N, что

$|x_{n'} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|x_{n''} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, $n' > N$, $n'' > N$. Отсюда

$$|x_{n'} - a - x_{n''} + a| \le |x_{n'} - a| + |x_{n''} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Доказательство достаточности основано на принципе вложенных отрезков и вданном курсе не приводится. , если но. 5

Пример. Доказать, что последовательность $x_n = \frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + \ldots + \frac{\cos n}{3^n}$ сходится.

Оценим модуль разности

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{\cos(n+1)}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)}{3^{n+p}} \right| \le \frac{1}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{3^{n+p}} <$$

$$\frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^p}}{1 - \frac{1}{3}} < \frac{1}{2 \cdot 3^n} < \frac{1}{3^n} < \varepsilon, \text{ при } n > N_\varepsilon = \left[\log_3 \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \text{ и любом } p.$$

N [illegible]

Пример. Доказать, что последовательность $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ расходится.

Оценим разность

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} \ge \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \ldots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}.$$

Возьмем $n = p$ и получим $|x_{n+p} - x_n| \ge \frac{n}{n+n} \ge \frac{1}{2}$.