Пример. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_0 n^k + \ldots + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^l + \ldots + b_{l-1} n + b_l} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^k\left(a_0 + \ldots + \frac{a_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{a_k}{n^k}\right)}{n^l\left(b_0 + \ldots + \frac{b_{l-1}}{n^{l-1}} + \frac{b_l}{n^l}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k a_0}{n^l b_0} = \begin{cases} \infty, & k > l \\ \frac{a_0}{b_0}, & k = l \\ 0, & k < l \end{cases}.$$

Пример. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}}{n+10} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+1/n^2} + \sqrt{1-1/n^2}}{1+10/n} = 2$.

Пример. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n^2} - n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt[3]{(n^3+n^2)^2} + n\sqrt[3]{n^3+n^2} + n^2} = \dfrac{1}{3}$.

Свойства б/м и б/б последовательностей.

1°. Если α_n — б/м, а x_n — ограничена, то $\alpha_n \cdot x_n$ — б/м.

2°. Если α_n — б/м, то $\beta_n = \dfrac{1}{\alpha_n}$ — б/б и, наоборот, если β_n — б/б, то $\alpha_n = \dfrac{1}{\beta_n}$ — б/м.

3°. Если x_n ограничена снизу положительным числом a, $0 < a \le x_n$, а $\alpha_n \ne 0$ — б/м, то $\beta_n = \dfrac{x_n}{\alpha_n}$ — б/б.

4°. Сумма, разность и произведение бесконечно малых последовательностей — б/м.

Пример. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{n} = \infty$.

Пример. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$, $a > 1$. Так как $a > 1$, то $a = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и

$(1+\varepsilon)^n > 1 + C_n^{k+1}\varepsilon^{k+1} > C_n^{k+1}\varepsilon^{k+1}$. Тогда

$$\frac{n^k}{a^n} < \frac{n^k}{C_n^{k+1}\varepsilon^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{\varepsilon^{k+1}} \frac{n^k}{n(n-1)\ldots(n-k)} = \frac{(k+1)!}{\varepsilon^{k+1}} \frac{1}{(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{k}{n})} \frac{1}{n} \to 0$$

сопряженное выражение

a b

$a^3 - b^3$

$$\frac{\left(\sqrt{n^3-n^2} - n\right)\left(\sqrt[3]{(n^3+n^2)^2} + \sqrt[3]{(n^3+n^2)}\,n + n^2\right)}{(\ldots)} =$$

$$= \frac{n^2}{3n^2 + \ldots}$$

макс степень

предел $\frac{1}{3}$

lim

еще ...

Лекция 3. Последовательности. Предел последовательности. Теоремы о пределах. Арифметические действия с пределами. Бесконечно малые, бесконечно большие последовательности.

Последовательности. Предел последовательности.

бесконечного

Определение 3.1. *Предельной точкой множества*, не являющегося конечным, называется точка, в любой выколотой окрестности которой, есть хотя бы одна точка множества.

Определение 3.1'. *Предельной точкой множества*, не являющегося конечным, называется точка, в любой окрестности которой, есть бесконечно много элементов множества.

Доказательство эквивалентности этих двух определений предоставляется для самостоятельной работы.

номер элемента посл-ти значение эл-та

Определение 3.2. Пусть каждому натуральному n поставлено в соответствие число x_n. Совокупность элементов x_n называется *числовой последовательностью* (обозначается $\{x_n\}$), а x_n — элемент последовательности.

Пример. $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right\} = \left\{1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3} \dots\right\}$

Определение 3.3. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0 \ \exists\ N(\varepsilon)$: для всякого $n > N(\varepsilon)$ выполняется $|x_n - a| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$, при $n \to \infty$.

Определение 3.3'. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0 \ \exists\ N(\varepsilon)$: для всякого $n > N(\varepsilon)$ выполняется $x_n \in U(a, \varepsilon)$

Сходящаяся последовательность — последовательность, имеющая предел.

Последовательность, не являющаяся сходящейся, называется расходящейся.

Можно дать другое эквивалентное определение предела последовательности.

Определение 3.3''. Число a называется *пределом последовательности* $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если в любой окрестности $U(a)$ содержатся почти все члены последовательности, за исключением конечного их числа.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \ \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

Замечание. Если множество значений $\{x_n\}$ не является конечным, то число a, являющееся пределом последовательности x_n, — предельная точка множества $\{x_n\}$.

Пример. Последовательность $\left\{\dfrac{1}{n}\right\} \to 0$. Действительно, по свойству Архимеда $\exists\, n_\varepsilon$: $n_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, $0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$, для всех $n > n_\varepsilon$.

$\exists \varepsilon > 0 : \forall N(\varepsilon) \ n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| > \varepsilon$

Определение 3.4. (Антипредел). Число a не является пределом последовательности $\{x_n\}$, если $\exists \varepsilon > 0$: для всякого $n \ \exists\, n' > n$: $|x_{n'} - a| \geq \varepsilon$.

Пример. Доказать, что последовательность $\left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n}\right\}$ расходится. Действительно расстояние между двумя соседними членами последовательности $x_{2k} = 1 + \dfrac{1}{2k} > 1$, $x_{2k+1} = -1 + \dfrac{1}{2k+1} < 0 \Rightarrow |x_{n+1} - x_n| > 1$. Для любого a возьмем $U(a, 1/2)$, т.е. два последовательных элемента последовательности одновременно попасть в эту окрестность не могут, т.е. для любого $a \ \exists \varepsilon = \dfrac{1}{2}$: для всякого $n \ \exists\, n' = n$ или $n+1$: $|x_{n'} - a| > \dfrac{1}{2}$.

сходящаяся, если сходится

Пример. $\lim\limits_{n \to \infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\} = 0$. Решается аналогично примеру с $\left\{ \frac{1}{n} \right\} \to 0$.

Пример. $\lim\limits_{n \to \infty} \left\{ \frac{n-1}{n} \right\} = 1$. Действительно, $\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, начиная с $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$.

$1 - \frac{1}{n}$

Пример. Последовательность $\{ (-1)^n \}$ ни к какому пределу не стремится. Действительно расстояние между двумя соседними членами последовательности $x_{2k} = 1$, $x_{2k+1} = -1$ => => $| x_{n+1} - x_n | > 1$. Для любого a возьмем $U(a, 1/2)$, т.е. два последовательных элемента последовательности одновременно попасть в эту окрестность не могут, т.е. для любого a $\exists \varepsilon = \frac{1}{2}$: для всякого $n \; \exists n' = n$ или $n+1$: $| x_{n'} - a | > \frac{1}{2}$. Это решение полностью повторяет решение примера, приведенного после определения антипредела. Однако, существует и более простое решение. По определению предела вне любой окрестности a должно находиться конечное число членов последовательности. Выбрав, например окрестность $U(a, 1/4)$ легко убедиться, что вне ее находится бесконечное число членов исследуемой последовательности.

Теоремы о пределах.

Определение ограниченности и неограниченности последовательностей аналогично соответствующим определениям данным в Л.2 для множеств.

Определение 3.5. Последовательность $\{ x_n \}$ называется *ограниченной сверху (снизу)*, если существует $K(k)$: для любого $n \in N$ справедливо $x_n \le K$ ($x_n \ge k$).

Определение 3.6. Последовательность, ограниченная сверху и снизу, называется *ограниченной*.

Теорема 3.1. Числовая последовательность не может иметь более *одного* предела.

Доказательство. Пусть существуют два предела a и b, и пусть для определенности $a < b$. Выберем $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ так, чтобы

$$U(a, \varepsilon) \cap U(b, \varepsilon) = \varnothing \tag{1}$$

По определению предела $\exists n_1$: для любого $n > n_1$ $x_n \in U(a, \varepsilon)$ и $\exists n_2$: для любого $n > n_2$ $x_n \in U(b, \varepsilon)$. Пусть $n' = \max\{ n_1, n_2 \}$, тогда для любого $n > n'$ одновременно выполняется $x_n \in U(a, \varepsilon)$, $x_n \in U(b, \varepsilon)$, что невозможно в силу (1).

Теорема 3.2. Если последовательность имеет предел, то она *ограничена*.

$\lim x_n - 0$

$\varepsilon = 1$

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 1$, тогда для любого $n > N_\varepsilon$ $| x_n - a | < 1$. Выберем $d = \max\{ 1, | x_1 - a |, \ldots, | x_{N_\varepsilon} - a | \}$ => $| x_n - a | < d$, $n \in N$.

$d = \max\{1_n$

$, |x_2 - a| \quad |x_1$

Утверждение обратное теореме 3.2. вообще говоря не верно.

Пример. Последовательность 1, 2, 1, 2 ...

$|x_n - a| < \varepsilon$

$|x_n - a| <$

$a - \varepsilon \; x_n < 0$

Теорема 3.3. Если последовательность имеет предел $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \ne 0$, то $\exists n'$: , только 1

$| x_n | > \frac{| a |}{2}$ для любого $n > n'$. Более того, если $a > 0$, то $x_n > \frac{a}{2} > 0$, а если $a < 0$, то $x_n < \frac{a}{2} < 0$, т.е. члены сходящейся не к нулю последовательности, начиная с некоторого номера сохраняют знак своего предела.

с нек-го номера N все эл-ты одного знака

, допустим их 2 (предело

$a < b$

$\varepsilon - \frac{b-a}{2}$ $\quad a - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon$

$\frac{a+b}{2} < \frac{b+a}{2}$ что неве

Доказательство. Пусть $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$. Из существования предела следует

$|a| - |x_n| \overset{<}{\leq} |x_n - a| \overset{\leq}{<} \frac{|a|}{2}$ и основное утверждение доказано. Теперь, если раскрыть модуль, то получим доказательство оставшихся утверждений теоремы.

Пример. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, $x_n \geq 0$, $a > 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$. Справедлива следующая цепочка для достаточно больших n.

$|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| = \frac{|x_n - a|}{|\sqrt{x_n} + \sqrt{a}|} \leq \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{a}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \varepsilon_2$. Переход к неравенству возможен в

$\sqrt{x_n} \geq \frac{\sqrt{a}}{2}$ –

силу того, что по теореме 3.3 $x_n > \frac{a}{2}$.

<u>Теорема 3.4</u>. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$. Если $x_n \leq y_n$, $n \in N$, то $a \leq b$.

Доказательство. От противного. Пусть при выполнении условий теоремы $a > b$. Выберем $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ и подберем n_1 и n_2 так, чтобы $a - \varepsilon < x_n$ $(n > n_1)$ и $y_n < b + \varepsilon$ $(n > n_2)$. Выберем $n' = \max\{n_1, n_2\}$ и тогда, очевидно $y_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < x_n$ для всех $n > n'$. А это противоречит условию теоремы $x_n \leq y_n$.

для 3х посл-тей

<u>Теорема 3.5</u>. (о двух миллиционерах) Если $x_n \leq y_n \leq z_n$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$, то $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = a$.

признак существования предела

с нек-го $a - \varepsilon < x_n$ $a + \varepsilon > z_n$.

как раскрытие модуля

Доказательство. Для достаточно больших n справедлива следующая цепочка неравенств. $a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$. Под «достаточно большим» понимается такой номер, начиная с которого выполняются одновременно все необходимые неравенства. Например, как в теореме 3.4.

Пример. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^p} = 0$, $p > 1$. Решение следует из неравенств $0 \leq \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n}$.

Пример. $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Действительно, $\sqrt[n]{n} = 1 + t_n$, $(t_n \geq 0)$. Возведем последнее в степень n. Воспользовавшись формулой бинома Ньютона $\left((1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^k\right.$, где $\left.C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}\right)$,

получим $n = 1 + n t_n + \frac{n(n-1)}{2} t_n^2 + \ldots$

$\Rightarrow n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} t_n^2$ или $\frac{2}{n} \geq t_n^2 \geq \sqrt{2/n} \geq t_n \geq 0 \Rightarrow t_n \to 0$.

$1 > \frac{n^n}{2} t_n^2$

Пример. $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$.

Действительно, для достаточно больших n справедливо $\frac{1}{n} < a < n$ (свойство Архимеда). Извлечем корень n степени и получим $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$. Из теоремы о двух миллиционерах следует утверждение примера.

Свойства сходящихся последовательностей.

Свойство 1. Если $x_n = c$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

Свойство 2. Если x_n и y_n сходятся, то $x_n \pm y_n$ сходятся и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Свойство 3. Если x_n и y_n сходятся, то $(x_n \cdot y_n)$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Свойство 4. Если x_n и y_n сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, $y_n \neq 0$, $n \in N$, то

$\dfrac{x_n}{y_n}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

Докажем, например свойство 3. Из сходимости $\{x_n\}$ следует ее ограниченность $|x_n| \le M$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ тогда справедливо

$|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2|b|}$, $n > n_1$ и $|y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, $n > n_2$. Тогда для любого $n > n' = \max\{n_1, n_2\}$ справедливо $|x_n \cdot y_n - ab| = |x_n \cdot y_n - x_n b + x_n b - ab| \le$ $\le |x_n|\,|y_n - b| + |b|\,|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Доказательство остальных свойств проводится самостоятельно.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

Определение 3.7. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой* (б/м), если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Лемма. Последовательность $\{x_n\}$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, тогда и только тогда, когда $x_n = a + \alpha_n$, где α_n – б/м.

Доказательство проводится самостоятельно.

Определение 3.8. Последовательность $\{\beta_n\}$ называется бесконечно большой (б/б), если для любого $K > 0$ $\exists N(K)$: для любого $n > N(K)$ выполняется $|\beta_n| > K$. При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \infty$ или $\beta_n \to \infty$.

Замечание. Если β_n начиная с некоторого номера принимает только положительные значения, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = +\infty$ или $\beta_n \to +\infty$, если только отрицательные — то $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = -\infty$ или $\beta_n \to -\infty$.