Лекция 10. Формула Тейлора.

Формула Тейлора для многочлена.

ссмотрим многочлен $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ (1).

родифференцируем этот многочлен n раз.

$$(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

$$'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

$$^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots n a_n = n!\, a_n$$

оложив в (2) $x = 0$ получим $a_0 = p(0)$, $a_1 = \frac{p'(0)}{1!}, \ldots, a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}$. Подставив ченные значения коэффициентов в (1) получим

$$(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (3).$$

тметим, что формула (3) эта таже формула (1) , с другим способом обозначения коэффициентов.

ожно тот же многочлен (1) разложить по степеням $x - x_0$; т.е. представить $p(x)$ в ви-

$$(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + \ldots + A_n(x - x_0)^n\,.$$

сли теперь обозначить $\xi = x - x_0$, то

$$(\xi) = A_0 + A_1\xi + \ldots + A_n\xi^n\,,$$

це $A_0 = p(x_0)$, $A_1 = \frac{p'(x_0)}{1!}, \ldots, A_n = \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}$, но в связи с тем, что

$) = p(x_0 + \xi)$ имеем

$$(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\,.$$

тметим весьма полезную вещь. Если многочлен можно представить в виде

$$(x) = c_0 + \frac{c_1}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{c_n}{n!}(x - x_0)^n\,,$$

о необходимо

$$_0 = p(x_0),\ c_1 = \frac{p'(x_0)}{1!}, \ldots, c_n = \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}\,.$$

Разложение по формуле Тейлора произвольной функции.

Пусть для $f(x)$ в точке x_0 существуют производные всех порядков до n включительно. значит, что функция определена и имеет производные в промежутке $[a, b]$ до $(n-1)$-орядка включительно и имеет в точке x_0 производную n-го порядка.

оставим многочлен

$$(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (4).$$

з вышесказанного следует, что этот многочлен и его производные имеют в точке x_0 те же сния, что и $f(x)$ и ее производные.

нако, в общем случае утверждать, что равенство $f(x)=p(x)$ верно для всех x нельзя.
му изучим разность $r(x)=f(x)-p(x)$.

орема 1. Пусть для $f(x)$ в точке x_0 существуют производные всех порядков до n
ительно, тогда

$$(x)=f(x)-p(x)=o\left((x-x_0)^n\right) \qquad (5),$$

. $r_n(x)$ представляет собой бесконечно малую порядка выше n – го при $x\to x_0$.

казательство. Доказательство проведем методом математической индукции.

При $n=1$ имеем $r(x_0)=r'(x_0)=0$. Рассмотрим

$$\lim_{0}\frac{r(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{r(x)-r(x_0)}{x-x_0}=0,\ \text{т.е.}\ r(x)=o\left(x-x_0\right).$$

Предположим, что утверждение верно для произвольного $k\geq 1$, т.е. если

$$)=r'(x_0)=\ldots=r^{(k)}(x_0)=0,\ \text{то}\ r(x)=o\left((x-x_0)^k\right).$$

Докажем, что утверждение верно для $k+1$, т.е. если для какой-нибудь функции, имею-
роизводные до $(k+1)$-го порядка включительно верно

$$)=r'(x_0)=\ldots=r^{(k+1)}(x_0)=0,\ \text{то}\ r(x)=o\left((x-x_0)^{k+1}\right).$$

предположению имеем

$$'(x)=o\left((x-x_0)^k\right).$$

спользовавшись теоремой Лагранжа (Т.9.5), получим

$$(x)=r(x)-r(x_0)=r'(c)(x-x_0) \qquad (6),$$

е $c\in(x_0;x)$ и, следовательно, $\left|c-x_0\right|<\left|x-x_0\right|$ и

$$'(c)=o\left((c-x_0)^k\right)=o\left((x-x_0)^k\right).$$

дставив последнее в (6) получим требуемую формулу (5).

перь окончательно имеем

$$(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right) \qquad (7).$$

рмула (7) называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

ли в (7) положить $x_0=0$, то полученную формулу

$$(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o\left(x^n\right) \qquad (8)$$

ято называть формулой Маклорена.

орема 2. Представление (7) — единственно.

оказательство. Действительно, пусть есть два представления функции $f(x)$:

$$(x)=A_0+A_1(x-x_0)+\ldots+A_n(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$$

$$(x)=B_0+B_1(x-x_0)+\ldots+B_n(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right).$$

огда в тождестве

$$B_0-A_0)+(B_1-A_1)(x-x_0)+\ldots+(B_n-A_n)(x-x_0)^n=o\left((x-x_0)^n\right) \qquad (9)$$

йдя к пределу при $x\to x_0$ получим $B_0=A_0$.

ставшееся в (9) делим на $x-x_0$ и снова перейдя к пределу при $x\to x_0$ получим
$=A_1$ и т.д.

имер. Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x)=e^x$. Воспользовавшись фор (8) и принимая во внимание, что $f^{(n)}(0)=1$, получим

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n) \qquad (10)$$

имер. Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x)=\sin x$. Воспользовавшись лой (6 лекция 9) и принимая во внимание, что

$^{k+1)}(0)=(-1)^{k-1}$, $\sin^{(2k)}(0)=0$, получим

$$x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+o(x^{2k}) \quad (n=2k) \qquad (11)$$

алогично, для $f(x)=\cos x$, получим

$$s\,x=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2k+1}) \quad (n=2k) \qquad (12)$$

имер. Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x)=\operatorname{arc}tg\,x$. Воспользовавшись то $f'=\frac{1}{1+x^2}$, или $f'\cdot(1+x^2)=1$, применим формулу Лейбница. В результате пол-

$(1+x^2)f^{(n+1)}+2nxf^{(n)}+n(n-1)f^{(n-1)}=0$. Подставим $x=0$ и получим

$^{1)}(0)+n(n-1)f^{(n-1)}(0)=0$. Принимая во внимание, что $f''=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ об-

ется в 0 при $x=0$, а $f'(0)=1$ получим

$^{(2k)}(0)=0$ и $f^{(2k+1)}(0)=-(2k-1)2k\,f^{(2k-1)}(0)=(-1)^k(2k)!$

дователно,

$^{(2k-1)}(0)=(-1)^{k-1}(2k-2)!.$

аким образом

$$\text{rc}\,tg\,x=x-\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+o(x^{2k}) \quad (n=2k).$$

ример. Написать разложение функции $e^{\sin x}$ до x^3. Воспользуемся формулой (10). Имеем

$$^{\sin x}=1+\sin x+\frac{\sin^2 x}{2!}+\frac{\sin^3 x}{3!}+o(x^3).$$

еперь воспользовавшись формулу (11) имеем

$$^{\sin x}=1+x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)+\frac{(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3))^2}{2!}+\frac{(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3))^3}{3!}+o(x^3).$$

оскольку по условию необходимо разложить до x^3, то

$$^{\sin x}=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3).$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

олученная формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (7) имеет массу практи х приложений, однако, ее нельзя использовать для определения количественной точности иления функции многочленом. Поэтому рассмотрим другие формы остаточного члена. и определенности будем рассматривать промежуток $[x_0;x_0+h]$, $h>0$. Для проме а $[x_0-h;x_0]$, $h>0$ приведенные ниже рассуждения вполне аналогичны.

есточим предположения относительно функции $f(x)$.

сть во всем промежутке $[x_0; x_0+h]$, $h>0$ существуют и непрерывны n производ-
пусть существует и конечна в $(x_0; x_0+h)$, $h>0$ производная $n+1$ – го порядка.

гда имеем

$$r_n(x)=f(x)-f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)-\ldots-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (13)$$

фиксируем любое значение x из промежутка $[x_0; x_0+h]$ и, заменяя в правой части постоянное число x_0 на переменную t составим функцию

$$\varphi(t)=f(x)-f(t)-\frac{f'(t)}{1!}(x-t)-\ldots-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

ем независимую переменную t считаем изменяющейся в промежутке $[x_0; x]$. В этом промежутке $\varphi(t)$ непрерывна и на концах принимает значения

$\varphi(x_0)=r_n(x)$, $\varphi(x)=0$.

роме того, в интервале $(x_0; x)$ существует производная

$$\varphi'(t)=-f'(t)-\left[\frac{f''(t)}{1!}(x-t)-f'(t)\right]-\left[\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2-\frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right]-\ldots$$

$$\ldots-\left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\right]=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

озьмем теперь произвольную функцию $\psi(t)$, непрерывную в промежутке $[x_0; x]$ и ...щую в интервале $(x_0; x)$ не обращающуюся в нуль производную. К функциям $\psi(t)$, $\varphi(t)$ применима теорема Коши (т.9.6):

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)},\ x_0<\xi<x \text{ или } \xi=x_0+\theta(x-x_0),\ 0<\theta<1.$$

оспользовавшись краевыми значениями для $\varphi(t)$ и полученным значением производной $\varphi'(t)$ получим

$$r_n(x)=\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(\xi)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \qquad (14)$$

еперь если подставлять в (14) вместо $\psi(t)$ различные удовлетворяющие поставленным условиям функции, мы получим различные формы остаточного члена в формуле Тейлора.

В частности, если подставить $\psi(t)=(x-t)^{n+1}$, то остаточный член будет иметь вид

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (15).$$

Остаточный член в такой форме носит название— остаточного члена в форме Лагранжа.

Если же подставить $\psi(t)=x-t$, то остаточный член в форме Коши примет вид

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1} \qquad (16)$$