Лекция1.множества.операции над множествами. Комбинаторика.метод математической индукции.

1. множества.операции над множествами.

Множества ,елемент множества являются первичными понятиями математики-.
Множества обозначаются большими буквами A,B,….,X,Y.
Элементы множества обозначаются малыми буквами a,b,…..,x,y.
Стандартные обозначениями:
N-множество натуральных чисел N={1,2,….};
Z- множество целых чисел
Q- множество рациональных чисел
I- множество иррациональных чисел
R- множество действительных (вещественных) чисел
C- множество комплексных чисел.
Если объект a является элементом множества A , то пишут $a\in A$ и читают « a принадлежит множеству A» или « множество A содержит элемент a ».
Запись $a\notin A$ означает , что объект a не является элементом множества A.
$\in$- « принадлежит » $\notin$- « не принадлежит » .Пример:
$1\in N$, $\pi\in R$.

Определение 1.1 . если каждый элемент множества A является элементом множества B , то пишут $A\subset B$ и говорят , что A- подмножество множества B или « B содержит A ».
следствие 1. $A\subset A$.
следствие 2. Если $A\subset B$ и $B\subset C$, то $A\subset C$.
$\subset$- знак включения .
пример $N\subset N$.
Если существует элемент $a\in A$ такой , что $a\notin B$, то A не является множеством B . тогда пишут $A\not\subset B$.

Определение 1.2. множества состоящие изодних и тех же элементов называют равными и пишут A=B . в противном случае $A\neq B$.

Определение 1.3. множество которое не содержит ни одного элемента называют пустым множеством и обозначают $\varnothing$.

Определение 1.4. множество E , состоящее из всех тех и только тех элементов , которые принадлежат хотя бы одному из множества A и B , называется объединением множеств A и B и обозначается $E = A\cup B$.
$\cup$- знак объединения.

Определение 1.5. множество D , состоящее из всех тех и только тех элементов , которые принадлежат как множеству A так и множеству B , называется пересечением множеств A и B и обозначается $D= A\cap B$.
$\cap$- знак пересечения.
Пример A={ 1,2,3,4 } , B={ 3,4,5,6 } , $A\cup B$ = { 1,2,3,4,5,6 } , $A\cap B$={ 3,4 }.

Пример $A=\{ x: x\in R , x>1\}$, $B=\{ x: x\in R , x\leq 3 \}$,
$A \cap B=R$, $A \cup B= \{ x: x\in R , 1 < x \leq 3 \}$
Если $A \cap B=\varnothing$, то множества A и B не пересекаются.

Свойства операций объединения и пересечения множеств.

1. $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ – коммутативность ;
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ – ассоциативность ;
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ - -дистрибутивность;
4. $A \cap A = A$, $A \cup A = A$

<u>Определение 1.6.</u> множество, состоящее из всех элементов множества A , не принадлежащих множеству B , называется разностью множества A и B и обозначается $A \setminus B$.

Пример. Если $A=\{ 1,2,3,4 \}$ и $B=\{ 3,4,5,6 \}$, то $A \setminus B= \{ 1,2 \}$, $B \setminus A=\{ 5,6 \}$.
Пример $A=\{ x: x\in R , x>1\}$, $B=\{ x: x\in R , x\leq 3 \}$.
$A \setminus B=\{ x: x\in R , x>3\}$, $B \setminus A=\{ x: x\in R , x\leq 1 \}$.

<u>Определение 1.7.</u> если $A \subset B$, то разность $B \setminus A$ называется дополнением множества A до множества B и обозначается A или A .
Из определения 1.7. следует , что $A \cup A =U$, $A \cap A = \varnothing$, $(A) = A$.
Для любых множеств A и B основного множества U справедливы законы двойственности (законы де Моргана)
1). $(A \cup B) = A \cap B$; 2). $(A \cap B) = A \cup B$

<u>Определение 1.8.</u> между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие , если каждому элементу множества A сопоставлен один и только один элемент множества B , так , что различным элементом множества A сопоставлены различные элементы множества B и каждый элемент множества B сопоставлен некоторому элементу множества A.

Пример. N- множество натуральных чисел , $A = \{ k : k \in N , k = 2n , n \in N \}$

2 <–> 1
4 <–> 2
6 <–> 3.
…
2n <–> n

определение 1.9. множества , между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие , называются **эквивалентными**. Пишут A~B .

Свойства отношений эквивалентности .

1. A~A – рефлексивность ;
2. Если A~B , то B~A – симметричность ;
3. Если A~B и C~B , то A~C – транзитивность.

Определение 1.10. если $A \sim B$, то говорят , что множества A и B имеют одинаковую мощность.

Определение 1.11. множество A называется **конечным** , если существует такое $n \in N$, что $A \sim \{ 1,2, \dots n \}$.

1. Множество A содержит n элементов (имеет мощность n)
2. $\varnothing$ - конечное , мощность равна нулю.

Определение 1.12. множество A называется **счетным** , если $A \sim N$.

Определение 1.13. множество называется **несчетным** если оно имеет мощность большую , чем мощность N .

Теорема Кантора 1. Множество всех рациональных чисел счетное .

Теорема Кантора 2. Множество R всех действительных чисел несчетное.

Определение 1.14. Множество A называется множеством мощности континуум , если $A \sim R$.

II.Комбинаторика.

Определение 1.15. Множество называется упорядоченым , если для любых двух его элементов a и b установлено отношение порядка $a \le b$ или $b \le a$,обладающее свойствами :

1. рефлексивности – $a \le a$;
2. антисимметричности – если $a \le b$ и $b \le a$, то a и b совпадают ;
3. транзитивности - если $a \le b$ и $b \le c$, то $a \le c$.

Пустое множество считается упорядоченным.

Пример . A – группа студентов , которых можно упорядочить по росту , по весу , по номеру в журнале и т.д.

Элементы конечных упорядоченных множеств записываются в круглых скобках.

Пример . A = (1,2,3) , B = (2,1,3) – различные множества.
$A_1 = \{ 1,2,3 \}$, $B_1 = \{ 2,1,3 \}$ – равные множества .
Пример . Множество A из трех элементов a,b,c имеет три подмножества $A_1 = \{ a,b \}$, $A_2 = \{ b,c \}$, $A_3 = \{ a,c \}$ и шесть упорядоченных множеств из двух элементов $B_1 = (a,b)$, $B_2 = (b,a)$ и т.д.

Определение 1.16. Пусть множество A содержит n элементов . Каждое его упорядоченное подмножество , состоящее из k элементов, называется размещением из n элементов по k элементов.

Число размещений из n элементов по k элементов обозначается $A_n^k = n!/(n-k)!$,где $n! = 1*2*\dots*(n-1)*n$, $k \le n$, $0! = 1$.
Пример . сколькими способами можно рассадить 5 человек на 2 стульях , по одному на каждый стул.

Определение 1.17. Размещение из n элементов по n элементов называется перестановками из n элементов .
Число всех перестановок из n элементов обозначают $P_n = A_n^n = n!$.

Пример. Сколько различных слов из 6 букв можно составить из букв слова "задача"?, "математика", "ананас"? Ответы : $\frac{6\,!}{3\,!} = 120$; $\frac{10\,!}{2\,!\cdot 3\,!\cdot 2\,!}$; $\frac{6\,!}{2\,!\cdot 3\,!}$.

Пример. Группа студентов изучает 7 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если на этот день запланированы занятия по 4 дисциплинам.

Определение 1.18. Пусть в множестве A n элементов. Каждое его подмножество, содержащее k элементов, называется **сочетанием** из n элементов по k элементов. Число всех таких сочетаний обозначается $C_n^{\,k} = \frac{n\,!}{k\,!\cdot(n-k)\,!}$.

Справедливы равенства:

1. $C_n^{\,k}\, k\,! = A_n^{\,k}$;
2. $C_n^{\,k} = C_n^{\,n-k}$;
3. $C_{n+1}^{\,k+1} = C_n^{\,k+1} + C_n^{\,k}$.

Доказать самостоятельно.

Пример. Сколькими способами $2n$ элементов можно разбить на пары. Ответ $(2n-1)\,!!$.

III. Метод математической индукции.

Существует много утверждений, зависящих от натурального числа n . Для доказательства таких утверждений часто применяется общий метод доказательства - метод математической индукции.

Суть такого метода в следующем.

1. Проверяется справедливость утверждения для $n = 1$ (база индукции).
2. Предполагается справедливость утверждения для произвольного $n = k$ (шаг индукции).
3. Доказывается справедливость утверждения для $n = k + 1$ с учетом предполагаемой справедливости его для $n = k$.

Пример. Доказать, что $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Проверяем при $n = 1$. Предполагаем, что равенство верно при $n = k$, т.е. $1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Докажем справедливость равенства

$1 + 2 + \ldots + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Действительно левуючасть можно записать в силу шага индукции

$$1 + 2 + \ldots + k + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Пример. Доказать для натурального n справедливость равенства $n \le 2^{\,n-1}$.

Проверяем при $n = 1$. Предполагаем, что неравенство верно при $n = k$, т.е. $k \le 2^{\,k-1}$. Докажем справедливость неравенства $k + 1 \le 2^{\,k}$, которое следует из неравенства $k + 1 \le 2k$

Пример (неравенство Бернулли) . $(1+\alpha)^n > 1 + \alpha n$, $\alpha > -1$, $\alpha \ne 0$, $n \ge 2$.

Проверяем при $n = 2$. Предполагаем, что неравенство верно при $n = k$, т.е. $(1+\alpha)^k > 1 + \alpha k$. Докажем справедливость неравенства $(1+\alpha)^{k+1} > 1 + \alpha(k+1)$. Умножим обе части неравенства, которое по предположению верно на $(1+\alpha)$. Тогда из очевидного неравенства $(1+\alpha k)(1+\alpha) > 1 + \alpha(k+1)$ следует искомое неравенство.

Бином Ньютона.

В качестве примера использования метода математической индукции докажем две формулы.

Пример. Докажем формулу

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n \ .$$

При $n = 1$ равенство верно. Предположим, что оно верно для $n = k$, т.е. $(a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \ldots\ldots + C_k^k b^k$ и докажем справедливость равенства $(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + \ldots\ldots + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1}$. Для доказательства в левой части напишем $(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b)$, подставим верную по предположению формулу и использовав равенство $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$ получим искомый результат.